УДК 338.27

ЛОГІСТИЧНІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧАХ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

LOGISTIC MODELS IN PROBLEMS OF ECONOMIC DYNAMICS

Тетяна Зінькевич
к.е.н., доцент, кафедра корпоративних фінансів і контролінгу
Валентина Лісовська
к.ф.-м.н., професор, кафедра вищої математики
Ольга Мельник
к.ф.-м.н., доцент, кафедра вищої математики

Tetyana Zinkevych
PhD, Associate Professor
Valentina Lisovska
PhD, Professor
Olga Melnik
PhD, Associate Professor
SHEI «Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman»

В статті проаналізовані моделі логістичної динаміки різних за складністю по числу використаних в них параметрів, а також по області застосування. Представлено види логістичних моделей та їх основні характеристики, причому вибір моделі здійснюється залежно від змісту завдання - по більшій точності моделювання або по більшій точності прогнозування.

It was considered system of mathematical relationships between the parameters of the object of the economic system, described by mathematical means in the form of equations (algebraic, differential, difference, integral), graphs, tables, charts and other means of construction, which describes the fundamental laws of material properties of the economic process. It is not considered secondary properties of the economic objects, parameters of which are not taken into account by the study of the economic process essence because they have little influence on the natural process.

Mathematical models are abstract models of economic models originals, which can describe by math tools the same economic process with different approximation errors to reality. But model can not fully display all properties and relationships between parameters of the modeled object.

A special place in the economic modeling has the balance model. They describe a state of the economic system, when all factors change of process can not take it out of balance, that their resultant is zero. Mathematical models of balance economic models are the model of macroeconomics.

The static models describe the state of economic object at some moment of time or time interval. The dynamic models describe the functional relationship between the changes of parameters of the time. These models generally use math tools of differential and difference equations.

The problems of economic dynamics include not only the description of the processes of leading to balance of economic system, but also the transformation processes of this state by the influence of external forces. Economic dynamics use mathematical analysis, calculus of variations, graphic methods, theory of catastrophes.

Economic-mathematical models of economic dynamics describe the behavior of the system (descriptive). Also used the optimization models to find the optimal state.

Note that the stages of problem statement and economic-mathematical model construction use conventional methods of modeling.

At the last stage decide respectively for the purpose of research. As a result the model can be supplemented by the new equations that describe control influences. In this case it is necessary to repeat analysis for determine the conformity of system dynamics purposes to its operation.

Ключові слова: модель природного росту, логістичний тренд, різницеві рівняння.

Key words: model of natural growth, logistic trend, difference equations.

Постановка проблеми

Розглянемо систему математичних співвідношень між параметрами об'єктів економічної системи, що описується математичними засобами у вигляді рівнянь (алгебраїчних, диференціальних, різницевих, інтегральних), графіків, таблиць, схем та іншими засобами побудови, якими описуються закономірності основних суттєвих властивостей економічного процесу. При цьому не розглядаються другорядні властивості економічних об'єктів, параметрами яких при дослідженні суті економічного процесу можна нехтувати, оскільки вони лише незначною мірою впливають на закономірний процес.

Математичні моделі є абстрактними моделями оригіналів економічних моделей, що математичними засобами можуть описувати один і той же економічний процес, але з різними похибками наближення їх до реальності. Хоча ніякою моделлю неможливо повною мірою відобразити всі властивості й співвідношення між параметрами модельованого об'єкта-оригінала.

У моделюванні економіки особливе місце займають рівноважні моделі, вони описують такий стан економічної системи, коли зміни всіх факторів процесу не можуть вивести її з стану рівноваги, тобто їх рівнодійна дорівнює нулю. Математичні моделі рівноважних економічних моделей є моделі макроекономіки.

У моделях статичних описується стан економічного об'єкта в певний момент або проміжок часу. У динамічних моделях описується функціональна залежність між зміною параметрів у процесі часу. Динамічні моделі звичайно використовують математичні засоби диференціальних і різницевих рівнянь.

Задачі економічної динаміки включають як опис процесів виведення системи до стану рівноваги, так і процесів трансформації самого цього стану під впливом зовнішніх сил. Економічна динаміка використовує математичний аналіз, варіаційне числення, графічні методи, теорію катастроф.

Економіко-математичні моделі економічної динаміки описують поведінку системи (дескриптивні). Застосовуються також оптимізаційні моделі для пошуку оптимального стану.

Процес дослідження динаміки економічних систем може здійснюватися за наступною схемою:

1. Постановка задачі;
2. Побудова економіко-математичної моделі;
3. Розв'язання за допомогою чисельних та аналітичних методів;
4. Аналіз розв'язків;
5. Розробка рекомендацій щодо удосконалення управління змодельованим процесом.

Зауважимо, що етапи постановки задачі і побудови економіко-математичної моделі використовують звичайні методики моделювання.

На останньому етапі приймають рішення відповідно до мети дослідження. Як результат цього модель може бути доповнена новими рівняннями, що описують керуючі впливи. У цьому випадку варто провести повторний аналіз для визначення відповідності динаміки системи цілям її функціонування.

У залежності від типу динаміки системи, що досліджується, динамічні моделі можуть підрозділятися на дискретні і неперервні. В дискретних динамічних моделях використовуються різницеві рівняння або система різницевих рівнянь. В неперервних динамічних моделях використовуються диференційні рівняння або системи диференційних рівнянь. Крім того, в окремих випадках можуть зустрічатися системи зі змішаною динамікою. У цьому випадку для їхнього опису використовують диференційно-різницеві рівняння.

Аналіз основних досліджень і публікацій. В економічних динамічних системах з неперервним часом розглядається модель природного росту (ріст при постійному темпі). Рівняння природного росту має вигляд:

$$y = y_0 e^{k(t-t_0)}, \quad (1)$$

де $y(t)$ – інтенсивність випуску продукції деякого підприємства (галузі),

$k = m\alpha p > 0 = const,$

$1/m$ – норма акселерації,

α – норма чистих інвестицій, тобто частина доходу py, що витрачається на чисті інвестиції.

Рівнянням (1) описується також динаміка росту цін при постійному темпі інфляції, процеси радіоактивного розпаду і розмноження бактерій.

Інтегральна крива рівняння (1), що відповідає початковій умові $y(0)=2$, представлена на рис. 1.

Модель природного росту доцільно застосовувати на початкових етапах розвитку економічної системи протягом обмеженого проміжку часу, оскільки, з часом у може приймати які завгодно великі значення, що не може не позначитися на зміні ціни (яка у даній моделі вважається постійною).

Найбільш часто в економіці розглядається динаміка логістичного зростання обумовленого показника. При цьому його еволюція динаміки така, що швидкість його росту змінюється з часом (перша похідна логістичної функції додатна, друга похідна змінює свій знак з «+» на «-», проходячи через точку перегину), а його зростання є обмеженим: прагне до деякої межі. Логістична динаміка зменшення обумовленого показника зустрічається рідше: перша похідна від'ємна, а в точці перегину друга похідна змінює свій знак.

Логістична крива також описує деякі моделі поширення інформації, ефективність реклами, динаміку епідемій, процеси розмноження бактерій в обмеженому середовищі та ін.

На рис.2 представлений вид зростаючої логістичної моделі. Вона підходить для опису такого процесу, при якому визначається показник, коли проходить повний цикл розвитку.

З графіка логістичної кривої видно, що при малих t логістичний ріст схожий із природним ростом, однак при великих t характер росту міняється, темпи зростання сповільнюються і крива асимптотично наближається до прямої. Можна, звичайно, логістичну тенденцію вважати об'єднанням трьох різних за типом трендів: параболічного з прискореним зростанням на першому етапі, лінійного - на другому етапі і гіперболічного на третьому етапі.

В роботі [2] показано, що в загальному випадку положення точки перегину не є фіксованим, а крива, зображена на рис.2, не обов'язково буде симетричною: для неї значення ординати точки перегину завжди дорівнює половині рівня насичення.

На рис.3 представлені приклади

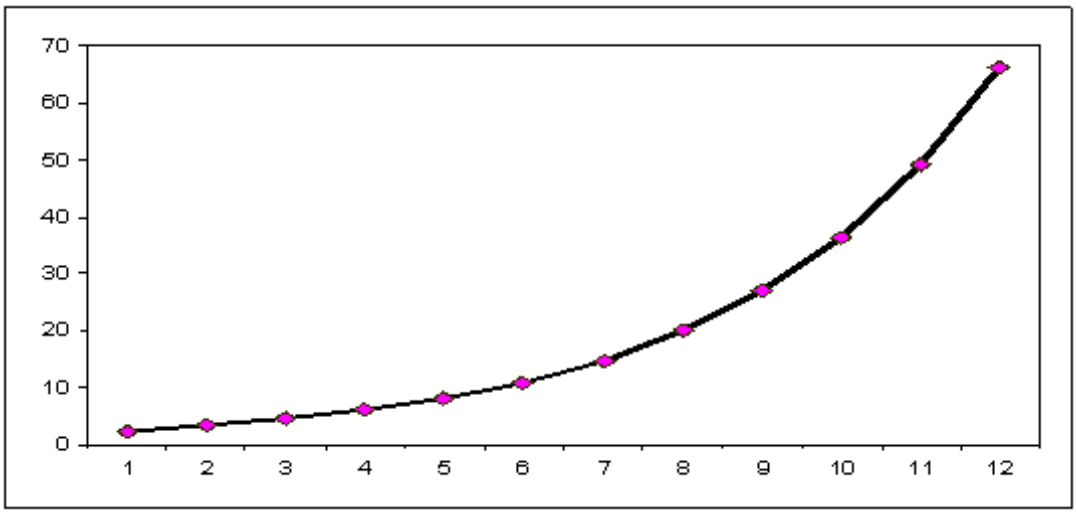

Рис. 1. Інтегральна крива рівняння моделі природного росту

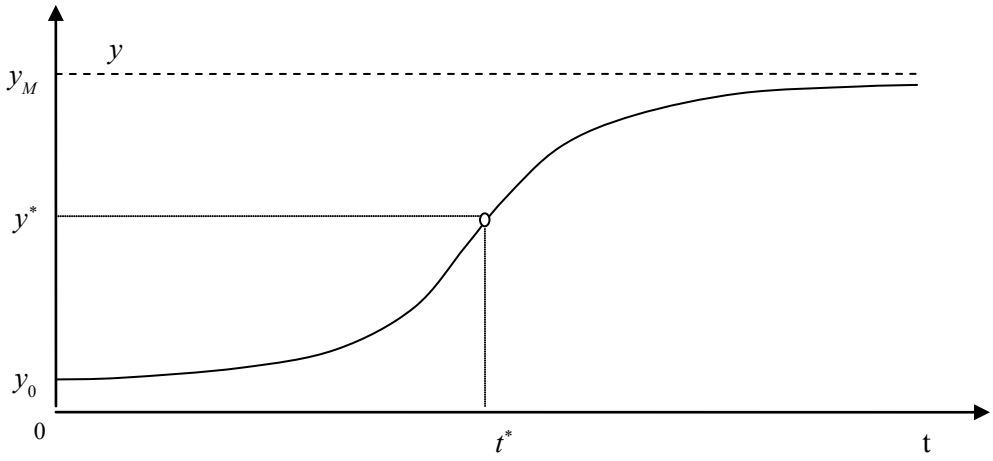

Рис.2. Графік зростаючої логістичної моделі

асиметричних логістичних моделей. Використовуються такі позначення: 0 - точка, відповідає половині рівня насичення; 1 - точка перегину знаходиться ліворуч половини рівня насичення; 2 - точка перегину знаходиться праворуч половини рівня насичення.

Приведемо області застосування логістичних функцій в економіко-математичному моделюванні [1]:

- життєві цикли товарів, зокрема, зміна попиту на товари, що володіють здатністю досягати деякого рівня насичення;
- частка насичення ринку новими товарами і послугами;
- оцінка зміни кількості сімей, які мають радіо і телебачення;
- зростання населення країни в страхових дослідженнях;
- розвиток біологічних популяцій;
- розвиток тих чи інших показників технологічних нововведень, зміна технологій;
- динаміка антисоціальної поведінки.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття. Моделі логістичної динаміки спостережень рівнів обраного показника Y_k обов'язково містять логістичний тренд D_k та стохастичну компоненту ε_k. Можлива присутність в моделі і сезонних, і циклічних компонент. Розглянемо найбільш просту адитивну структуру моделі часового ряду:

$$Y_k = D_k + \varepsilon_k \qquad (2)$$

а для стохастичної компоненти ε_k справедливими є умови Гаусса-Маркова, що дозволяє, застосовуючи метод найменших квадратів (МНК) для ідентифікації параметрів D_k, отримати їх оптимальні оцінки [3]. Відомо більше

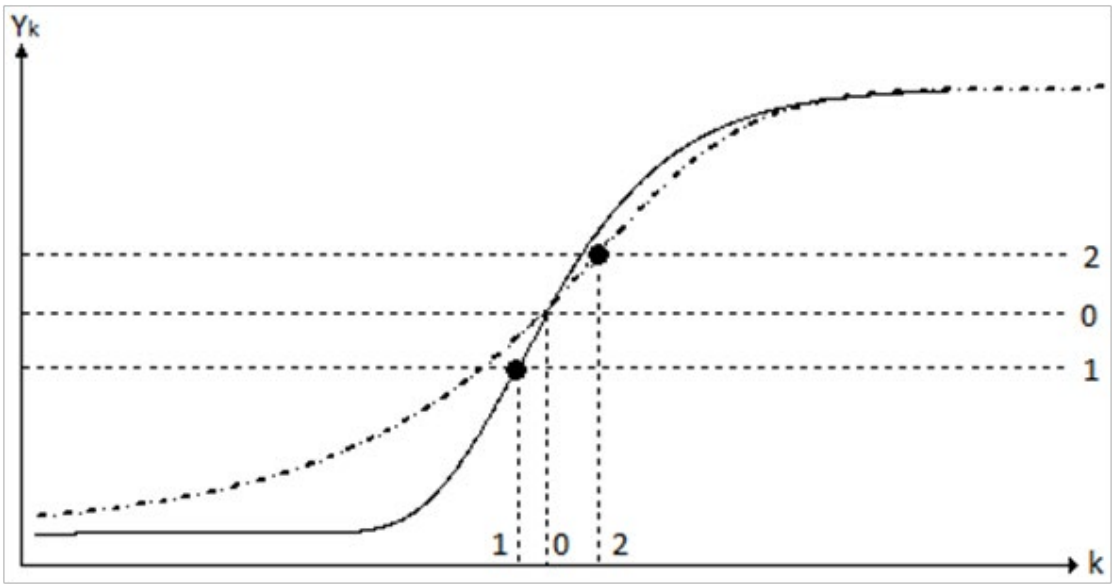

Рис. 3. Асиметричні логістичні функції росту

двадцяти моделей логістичної динаміки різних за складністю і по кількості використаних в них параметрів, а також по області застосування.

Таким чином, при моделюванні економічної динаміки, заданої часовим рядом, шляхом згладжування вихідного ряду, визначення наявності тренда, відбору однієї або декількох кривих росту і визначення їх параметрів, - у разі наявності тренда отримують одну або декілька трендових моделей для вихідного часового ряду. Постає питання, наскільки ці моделі близькі до економічної реальності, відображеної в часовому ряду, наскільки обґрунтовано застосування цих моделей для аналізу та прогнозування досліджуваного економічного явища. Отже, інтерес представляє ідентифікація моделей логістичної динаміки за допомогою чисельного розв'язання.

Основний матеріал дослідження

Аналітичні вирази логістичних моделей, представлені в Табл. 1 [3-5].

Модель GRM містить наступні параметри f_0, α, A_0, σ і в табл.1 задана у рекурентному вигляді:

$$f_1 = f_0 + \alpha \frac{f_0(A_0 - f_0)}{A_0 - (1-\sigma) f_0};$$

$$f_2 = f_1 + \alpha \frac{f_1(A_0 - f_1)}{A_0 - (1-\sigma) f_1};$$

...

$$f_m = f_{m-1} + \alpha \frac{f_{m-1}(A_0 - f_{m-1})}{A_0 - (1-\sigma) f_{m-1}}. \quad (3)$$

Задача оцінки параметрів (ідентифікація) логістичної функції в загальному випадку нетривіальна, оскільки застосування МНК безпосередньо до самої моделі вимагає мінімізації нелінійної функції помилки.

Так, у моделі Верхулста параметри оцінюються з застосуванням МНК:

$$A_0^o, A_1^o, \alpha^o = \arg\min_{A_0, A_1, \alpha} \sum_{k=1}^{N} \left(Y_k - \frac{A_0}{1 + A_1 e^{-\alpha k}} \right)^2, \quad (4)$$

за допомогою методу Левенберга-Марквардта, який є комбінацією градієнтного методу та методу Гаусса-Ньютона [6].

Ідентифікація моделі Рамсея здійснюється на основі конструювання узагальненої параметричної моделі авторегресії - ковзного середнього [3]:

$$Y_k = (2\lambda + 1) Y_{k-1} - (\lambda^2 + 2\lambda) Y_{k-2} + \lambda^2 Y_{k-3} + \xi_k, \quad (5)$$

$$\xi_k = \varepsilon_k - (2\lambda + 1)\varepsilon_{k-1} + (\lambda^2 + 2\lambda)\varepsilon_{k-2} - \lambda^2 \varepsilon_{k-3}, \quad (6)$$

де ξ_k – гомоскедастична стохастична компонента;

Таблиця 1

Види логістичних моделей та їх основні характеристики

Назва моделі (Симетричність)	Вид моделі {початкове значення; рівень насиченості}	Точка перегину $(k^*; Y(k^*))$
Модель Верхулста (Перла-Рида) (симетрична)	$Y_k = \frac{A_0}{1 + A_1 e^{-\alpha k}} + \varepsilon_k$ $\{0; A_0\}$	$\left(-\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{A_1}\right); \frac{A_0}{2}\right)$
Модель Рамсея (асиметрична)	$Y_k = C(1 - (1 + \alpha k)e^{-\alpha k}) + B_0 + \varepsilon_k$ $\{B_0; C + B_0\}$	$\left(\frac{1}{\alpha}; B_0 + C - \frac{2C}{e}\right)$
Модель Гомпертца (асиметрична)	$Y_k = C + A_0 e^{-e^{-\alpha(k-k_0)}} + \varepsilon_k$ $\{C; C + A_0\}$	$\left(k_0; C + \frac{A_0}{e}\right)$
GRM (generalized rational innovation diffusion model) (асиметрична)	$Y_k = f_{k-1} + \alpha \frac{f_{k-1}(A_0 - f_{k-1})}{A_0 - (1-\sigma) f_{k-1}} + \varepsilon_k$ $\{f_0; A_0\}$	$Y(k^*) = \frac{A_0(\sqrt{\sigma} - 1)}{\sigma - 1}$

наступні параметри визначаються у вигляді:

$$\lambda^o = \arg\min_{\lambda} \sum_{k=3}^{n} \left(Y_k - (2\lambda+1)Y_{k-1} + (\lambda^2+2\lambda)Y_{k-2} - \lambda^2 Y_{k-3}\right)^2, \qquad (7)$$

$$\alpha^o = -\ln \lambda^o; \qquad (8)$$

$$C^o, B_0^o = \arg\min_{C,B_0} \sum_{k=1}^{N} \left(Y_k - C(1-(1+\alpha^o k)e^{-\alpha^o k}) - B_0\right)^2. \qquad (9)$$

Для ідентифікації моделі Гомпертця використовується метод Гаусса-Ньютона, який зводить завдання мінімізації нелінійної функції МНК до ітераційної мінімізації лінійних функцій [7].

При ідентифікації моделі GRM використовується евристичний алгоритм RPROP, розроблений в теорії нейронних мереж [8].

Вибір моделі здійснюється залежно від змісту завдання: по більшій точності моделювання або по більшій точності прогнозування, або з урахуванням обох характеристик.

Для характеристики якості моделювання використовується коефіцієнт детермінації [9, 10]:

$$R^2 = \frac{\sum_{k=1}^{N}\left(Y_k^o - M[Y_k]\right)^2}{\sum_{k=1}^{N}\left(Y_k - M[Y_k]\right)^2}, \qquad (10)$$

Y_k^o – модельні значення ряду динаміки.

Зазвичай вважають задовільним якість моделювання при $0{,}7 \le R^2 \le 1$.

Якість прогнозування визначається за допомогою MAPE-оцінки:

$$MAPE = \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}\left|\frac{Y_k - Y_k^o}{Y_k}\right| \cdot 100\%, \qquad (11)$$

де l – глибина (горизонт) прогнозу, причому точність прогнозування вважають, зазвичай, $MAPE \le 10\%$.

Розглянемо модель, у якій темпи зростання залежать не від доходу, а від прибутку. Нехай $C(y) = \alpha y + \beta$ – витрати, (α, β – постійні), тоді

$$\frac{dy}{dt} = kp(y) - \alpha y - \beta, \qquad (12)$$

Якщо $p(y) = \frac{b}{k}y - ay^2$, то права частина рівняння (12) являє собою квадратний тричлен відносно y:

$$\frac{dy}{dt} = -k\,a\,y^2 + (b-\alpha)\,y - \beta. \qquad (13)$$

Координати стаціонарної точки задовольняють квадратне рівняння

$$-\,kay^2 + (b-\alpha)\,y - \beta = 0, \qquad (14)$$

або $kay^2 - (b-\alpha)\,y + \beta = 0$ (15)

Розглянемо можливі варіанти.

1). Дискримінант D квадратного рівняння (15) $D < 0$, то $y' < 0$. Витрати настільки великі, що це приводить до постійного падіння рівня виробництва і зрештою до банкрутства (рис.4).

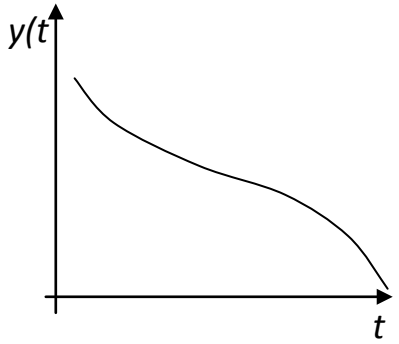

Рис.4. Графічний аналіз моделі (13): банкрутство підприємства

2). $D = 0, y' \le 0$ - один стаціонарний розв'язок. При цьому інтегральні криві, що задовольняють початковій умові $y(t_0)=y_0>y^*$, будуть асимптотично наближатися до y^* на $+\infty$, а інтегральні криві, що задовольняють умові $y_0<y^*$, будуть асимптотично наближатися до y^* на $-\infty$ (Рис.5).

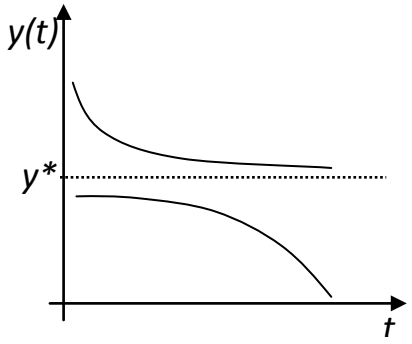

Рис.5. Графічний аналіз моделі (13) одна стаціонарна точка

3). $D > 0$. Існують два стаціонарних розв'язки $y=y_1$ $y=y_2$ $(0 < y_1 < y_2)$. При цьому $y' > 0$ при $y_1 < y < y_2$ і $y'<0$ при $y_1<y$ або $y>y_2$ (рис.6).

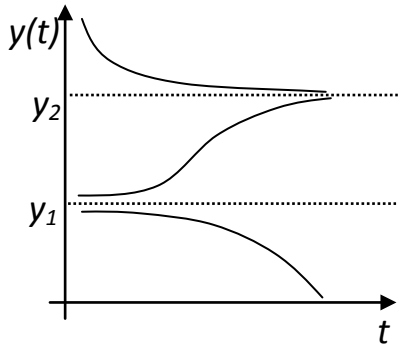

Рис. 6. Графічний аналіз моделі (13)- дві стаціонарні точки.

ВИСНОВКИ З ДАНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО РОЗВИТКУ В ЦЬОМУ НАПРЯМКУ

Логістичні моделі являються потужним інструментом економічного аналізу, прогнозування та моделювання різних економічних процесів: моделювання інноваційних процесів, визначення оцінки підприємства на ринку, що розвивається, прогнозування продажів продукції, формування оптимального маркетингового бюджету.

Прогнозування на основі моделі кривої росту ґрунтується на продовженні в майбутнє тенденції, що спостерігалася в минулому. При такому підході зміну досліджуваного показника пов'язують лише з плином часу; вважається, що вплив інших факторів несуттєво або побічно позначається через фактор часу.

Використання S-образних кривих в технологічному прогнозуванні обумовлено простотою їх застосування, наведені методи визначення параметрів кривої дозволяють в короткий термін зробити прогноз про розвиток технології. Але, незважаючи на широке застосування моделей, можна виділити невеликі мінуси. Вони виходять з того, що за допомогою моделі прогнозування важко уявити, як точно поведе себе в майбутньому розвиток, а прогноз може бути і умовним.

Таким чином, доведена раціональність використання економіко-математичних моделей на основі логістичних кривих при вирішенні багатьох економічних проблем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Блудова Т.В., Джаладова І.А., Макаренко О.І., Шуклін Г.В. Математична економіка. Навч. посіб. - К.: КНЕУ, 2009.- 464 с.

2. Кожухова В.Н. Моделирование и прогнозирование эволюционирующей динамики логистическими моделями тренда [Текст]: методические указания / В.Н. Кожухова, В.К. Семенычев, Е.В. Семенычев. – Самара: Изд-во «Самарская академия государственного и муниципального управления», 2011. – 14 с.

3. Семёнычев В.К., Семёнычев Е.В. Информационные системы в экономике. Эконометрическое моделирование инноваций. Часть 1: учеб. пособие – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – 217 с.

4. Nakicenovic N., Grubler A. Diffusion of technologies and social behavior – Springer Verlag and International Institute for Applied Systems Analysis, Berlin and New York, 1991. – 605 с.

5. Giovanis A.N., Skiadas C.H. A Stochastic Logistic Innovation Diffusion Model Studying the Electricity Consumption in Greece and USA // Technological Forecasting and Social Change. – 1999. – № 61. – С. 235-246.

6. Библиотека алгоритмов ALGLIB. Алгоритм Левенберга-Марквардта. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://alglib.sources.ru.

7. Alfonso Croeze, Lindsey Pittman, Winnie Reynolds. Nonlinear Least-Squares Problems with the Gauss-Newton and Levenberg-Marquardt Methods. Department of Mathematics University of Mississippi Oxford, MS July 6, 2012.

8. Осовский, С. Нейронные сети для обработки информации / Пер. с польского И.Д. Рудинского. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 344 с.

9. Блудова Т. В. Теорія ймовірностей. — Л.: ЛБІ НБУ, 2005. — 318 с.

10. Григулич С.В., Лісовська В.П., Макаренко О.І. та ін. «Теорія ймовірностей для економістів: навч.посіб. – К.: КНЕУ. 2012. – 307 с.

REFERENCES

1. Bludova, T. and other, (2009), Matematichna ekonomika, KNEU, Kyiv, Ukraine.
2. Kozhuhova, V. (2011), Modelirovanie i prognozirovanie ehvolyucioniruyushchej dinamiki logisticheskimi modelyami trenda, SAGMU, Samara, Russia.
3. Semenichev, V. and Semenichev, E. (2006), Informacionnye sistemy v ehkonomike. EHkonometricheskoe modelirovanie innovacij, SGAKU, Samara, Russia.
4. Nakicenovic, N. and Grubler, A. (1991), Diffusion of technologies and social behavior, Springer Verlag and International Institute for Applied Systems Analysis, New York, USA.
5. Giovanis A.N., Skiadas C.H. (1999), A Stochastic Logistic Innovation Diffusion Model Studying the Electricity Consumption in Greece and USA, Technological Forecasting and Social Change, № 61, pp. 235-246.
6. Biblioteka algoritmov ALGLIB. Algoritm Levenberga-Markvardta. [EHlektronnyj resurs]. Rezhim dostupa: http://alglib.sources.ru.
7. Croeze, A., Pittman, L. and Reynolds, W. (2012), Nonlinear Least-Squares Problems with the Gauss-Newton and Levenberg-Marquardt Methods, University of Mississippi Oxford.
8. Osovskij, S. (2002), Nejronnye seti dlya obrabotki informacii, Finansy i statistika, Moscow, Russia.
9. Bludova, T. (2005), Teorija jmovitnostej, LBI NBU, Lviv, Ukraine.
10. Grigulich, S. and other, (2012), Teorija jmovitnostej dla ekonomistiv, KNEU, Kyiv, Ukraine.